Tentamen Stromingsleer

20 juni 2012, 14:00-17:00.

Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Alle onderdelen wegen even zwaar. Succes.

1. We beschouwen een stroming in een homogeen, niet-viskeus, niet-samendrukbaar medium. Het snelheidveld wordt gegeven door $v(x,t)$; de massadichtheid is ρ, p is de druk. Er zijn geen externe krachten.

   (a) Toon aan dat de versnelling van een deeltje dat meebeweegt met de stroming wordt gegeven door
   $$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\, v$$

   (b) De bewegingingsvergelijkingen van Euler onstaan door toepassing van de tweede wet van Newton ('kracht is massa maal versnelling') op een vloeistof elementje. Leid deze vergelijkingen af.

   (c) Toon aan dat (wervelstelling van Helmholtz)
   $$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\, \omega = (\omega \cdot \nabla)\, v$$
   waarbij ω de wervelvector is.
   NB: Je mag hierbij van de identiteit $(u \cdot \nabla) u = \omega \times u + \frac{1}{2}\nabla(|u|^2)$ gebruik maken, zonder bewijs.

   (d) Beredeneer dat wanneer op een bepaald tijdstip t_0 de wervelsterkte overal nul is, dat dan voor alle $t > t_0$ geldt dat $\omega = 0$.

   (e) Een rotatievrije stroming kan worden beschreven door een snelheidpotentiaal Φ. Laat zien dat in rotatievrije stromingen (wet van Bernoulli):
   $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constant}$$
   overal in de stroming, d.w.z de constante hangt aleen van de tijd af.

2. We beschouwen een stilstaand lichaam begrensd door een gesloten contour S in het z-vlak. Het lichaam is geplaatst in een een willekeurige stationaire niet-samendrukbare 2D potentiaalstroming in het z-vlak. S is een stroomlijn. D.m.v. integratie van drukkrachten vinden we de kracht X die door de vloeistof in de positieve x-richting wordt uitgeoefend op het lichaam $X = -\int_S p\,dy$. Op soortgelijke wijze wordt de

kracht in de positieve y-richting $Y = \int_S p dx$. Deze twee krachten worden complex gecombineerd:

$$X - \mathrm{i}Y = -\mathrm{i} \int_S p\,(dx - \mathrm{i}dy)$$

Toon aan dat (eerste stelling van Blasius)

$$X - \mathrm{i}Y = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\rho \int_S \left(\frac{d\chi}{dz}\right)^2 dz$$

waarbij ρ de massadichtheid voorstelt en χ de complexe potentiaal is.

3. We beschouwen bewegingen van een watermassa (met constante dichtheid ρ) waarvan het vrije oppervlak in rusttoestand samenvalt met het vlak $z = 0$. De zwaartekracht werkt in de richting van de negatieve z-as. Het water is eindig diep, d.w.z. de bodem wordt gegeven door $z = -h(x,y)$. Wanneer het water golfbewegingen uitvoert wordt de vorm van het vrije oppervlak beschreven door $z = \eta(x,y,t)$. Het water wordt gezien als een niet-viskeuze, onsamendrukbare vloeistof. Verder gaan we ervan uit dat de stroming van het water rotatievrij is, en dat de golf een zeer kleine amplitude heeft. De gelinearizeerde kinematische vrijeoppervlakte conditie luidt dan

$$\eta_t = \Phi_z$$

op $z = 0$, waarbij Φ de snelheidspotentiaal.

(a) Geef een partiële differentiaalvergelijking voor Φ.

(b) Leid de dynamische vrijeoppervlakteconditie af, en toon aan dat de gelineariseerde dynamische randvoorwaarde op $z = 0$ wordt gegeven door

$$\Phi_t + g\eta = 0$$

waarbij g de valversnelling voorstelt.

(c) Laat zien dat de bodemconditie wordt gegeven door

$$\Phi_x h_x + \Phi_y h_y + \Phi_z = 0$$

op $z = -h(x,y)$.

(d) We nemen aan dat h constant is en dat de potentiaal niet van y afhangt. Toon aan dat Φ (in het gelineariseerde geval) gegeven wordt door het reële deel van

$$A \cosh\{k(z+h)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx \pm \omega t)}$$

waarbij

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$$

4. We beschouwen een tweedimensionale, stationaire stroming van een viskeuze, niet-samendrukbare vloeistof tussen de vlakken $y = 0$ en $y = h$. Beide vlakken staan stil. Ver weg, zeg bij $x = -L/2$, is de druk gelijk aan p_1, terwijl bij $x = L/2$ de druk gelijk is aan p_2 ($< p_1$). Dit drukverschil veroorzaakt de stroming; er zijn geen externe krachten.

   (a) Neem aan dat de snelheidsvector wordt gegeven door $(u(x, y), 0)$. Laat zien dat u niet van x afhangt.

   (b) Leid uit de Navier-Stokes vergelijkingen af dat de druk p niet van y afhangt, en dat $p'(x) =$ constant.

   (c) Toon aan dat (Poiseuille stroming)

   $$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(y-h)$$

   waarbij μ de dynamische viscositeitscoefficient is.

   (d) Bereken de massaflux Q tussen de twee vlakken, en toon aan dat ('wet van Ohm': spanningsverschil = weerstand maal stroomsterkte):

   $$p_1 - p_2 = \frac{12\mu L}{\rho h^3}Q$$

   waarbij ρ de massadichtheid voorstelt.

   (e) Leg uit wat het getal van Reynolds is. Zijn de bovenstaande formules correct voor alle waarden van het Reynolds getal?